DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2013.02.022

文章编号:1000-5471(2013)02-0001-03

2个推广的Smarandache方程及其正整数解①

黄 炜

宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013

摘要:采用初等方法与解析方法,对2个含有 n 个变量的推广的Smarandache方程

$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)+\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)+\cdots+\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=2na$$

$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)\cdot\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=(2a)^n$$

进行了研究,并得出其有正整数解 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$.

关 键 词:Smarandache方程;可解性;正整数解

中图分类号:O156.2 文献标志码:A

文献[1]要求我们研究方程

$$xa^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}a^{x}=2a \tag{1}$$

的正整数解问题,关于这一问题,文献[2-3]对其进行了研究,并给出了较好的结论:对所有的 $a\in\mathbf{R}\backslash\{-1,0,1\}$,方程 $xa^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}a^{x}=2a$ 仅有1个正整数解 $x=1$.

本文将方程(1)推广和延伸到 n 个变量的情形,即求方程

$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)+\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)+\cdots+\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=2na \tag{2}$$

$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)\cdot\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=(2a)^n \tag{3}$$

的正整数解.

引理1[4] 设 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均数和几何平均数分别是

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

引理2[4] 如果多元函数 $z=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 在点 $(x'_1,x'_2,x'_3,\cdots,x'_n)$ 处有极值,且在该点存在 n 个一阶偏导数,那么它在该点的偏导数为零,即 $f'_{x_1}(x'_1,x'_2,x'_3,\cdots,x'_n)=0$,$f'_{x_2}(x'_1,x'_2,x'_3,\cdots,x'_n)=0$,$\cdots$,$f'_{x_n}(x'_1,x'_2,x'_3,\cdots,x'_n)=0$.

定理1 对所有的实数 $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$,方程(2)有且仅有一组正整数解 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$.

证 对实数 a 的取值进行分类讨论:

---

① 收稿日期:2011-05-26

基金项目:国家自然科学基金(11071194);陕西省教育厅自然科学基金(09JK432).

作者简介:黄 炜(1961-),男,陕西岐山人,教授,主要从事解析数论与特殊函数的研究.

(1°) 当 $a \geqslant 1$ 时，由引理 1 可推出

$$\left(x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1} a^{x_1}\right) + \left(x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \frac{1}{x_2} a^{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n a^{\frac{1}{x_n}} + \frac{1}{x_n} a^{x_n}\right) \geqslant$$

$$2\sqrt{a^{\frac{1}{x_1}+x_1}} + 2\sqrt{a^{\frac{1}{x_2}+x_2}} + \cdots + 2\sqrt{a^{\frac{1}{x_n}+x_n}} \geqslant n \cdot 2\sqrt{a^2} = 2na$$

当且仅当 $x_1 = \frac{1}{x_1} = x_2 = \frac{1}{x_2} = \cdots = x_n = \frac{1}{x_n} = 1$ 时方程(2)成立，这样就证明了对于 $a \geqslant 1$，方程(2)有且仅有一组正整数解 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$.

(2°) 当 $0 < a < 1$ 时，设函数

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = \left(x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1} a^{x_1}\right) + \left(x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \frac{1}{x_2} a^{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n a^{\frac{1}{x_n}} + \frac{1}{x_n} a^{x_n}\right) - 2na$$

则函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 的零点分量 $x_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，且函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续、可导．对 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 分别关于 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 求偏导数得

$$f'_{x_1} = a^{\frac{1}{x_1}}\left(1 - \frac{\ln a}{x_1}\right) - \frac{1}{x_1^2} a^{x_1} + \frac{1}{x_1} a^{x_1} \ln a = a^{\frac{1}{x_1}}\left(1 - \frac{\ln a}{x_1}\right) + \frac{1}{x_1} a^{x_1}\left(\ln a - \frac{1}{x_1}\right)$$

类似可得

$$f'_{x_2} = a^{\frac{1}{x_2}}\left(1 - \frac{\ln a}{x_2}\right) + \frac{1}{x_2} a^{x_2}\left(\ln a - \frac{1}{x_2}\right)$$

……

$$f'_{x_n} = a^{\frac{1}{x_n}}\left(1 - \frac{\ln a}{x_n}\right) + \frac{1}{x_n} a^{x_n}\left(\ln a - \frac{1}{x_n}\right)$$

分别令 $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \cdots = f'_{x_n} = 0$，得

$$a^{\frac{1}{x_1}}(\ln a - x_1) = a^{x_1}\left(\ln a - \frac{1}{x_1}\right)$$

$$a^{\frac{1}{x_2}}(\ln a - x_2) = a^{x_2}\left(\ln a - \frac{1}{x_2}\right)$$

……

$$a^{\frac{1}{x_n}}(\ln a - x_n) = a^{x_n}\left(\ln a - \frac{1}{x_n}\right)$$

观察得到 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = k$，则 $(k, k, \cdots, k)$ 为 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 的可能极值点.

下面证明 $(k, k, \cdots, k)$ 是唯一的．设函数 $g(x) = a^{\frac{1}{x}}(\ln a - x) - a^x\left(\ln a - \frac{1}{x}\right)$，其中 $0 < a < 1$．证明 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调函数．因为

$$g'(x) = a^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln a}{x^2}(\ln a - x) - 1\right) - a^x\left(\ln a\left(\ln a - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$-a^{\frac{1}{x}}\left(\left(\frac{\ln a}{x}\right)^2 - \frac{\ln a}{x} + 1\right) - a^x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln a}{x} + \ln^2 a\right) = -a^{\frac{1}{x}}\left(\left(\frac{\ln a}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) - a^x\left[\left(\frac{1}{x} + \ln a\right)^2 + \frac{3\ln\frac{1}{a}}{x}\right] < 0$$

即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数，故对应于同一个函数值 $g(x_0)$，有且仅有 1 个 x_0 与之对应，从而 $(k, k, \cdots, k)$ 为 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 唯一的极值点．方程(2)可简化为 $a^{\frac{1}{x}}(\ln a - x) = a^x\left(\ln a - \frac{1}{x}\right)$，则 $k = 1$，故 $(1, 1, \cdots, 1)$ 为函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 的极值点，此时极值为 0．事实上，假设函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 还有极值点 $(x'_1, x'_2, x'_3, \cdots, x'_n)$，则由多元函数极值存在的必要条件可知，必有 $x'_1 = x'_2 = x'_3 = \cdots = x'_n = 1$ 成立，与单调函数同一函数值对应唯一自变量矛盾，故 $(1, 1, \cdots, 1)$ 是函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 唯一的极值点，从而方程

$$\left(x_1 a^{\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{x_1} a^{x_1}\right) + \left(x_2 a^{\frac{1}{x_2}} + \frac{1}{x_2} a^{x_2}\right) + \cdots + \left(x_n a^{\frac{1}{x_n}} + \frac{1}{x_n} a^{x_n}\right) = 2na$$

有且仅有一组正整数解 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$.

(3°) 当 $a<0$ 时，方程(2)若要有解，则 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 必为有理数. 设 $x_i=\frac{p_i}{q_i}$，$(p_i, q_i)=1(i=1, 2, \cdots, n)$. 若要 $a^{\frac{q_i}{p_i}}$ 有意义，则 p_i 为奇数；故若要 $a^{\frac{p_i}{q_i}}$ 有意义，则 q_i 为奇数. 所以 $a^{\frac{1}{x_i}}=-|a|^{\frac{1}{x_i}}$，$a^{x_i}=-|a|^{x_i}$，于是方程(2)可化为

$$\left(x_1|a|^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}|a|^{x_1}\right)+\left(x_2|a|^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}|a|^{x_2}\right)+\cdots+\left(x_n|a|^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}|a|^{x_n}\right)=$$
$$-\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)-\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)-\cdots-\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=$$
$$-2na=2n|a|$$

类似前面的推导过程，定理1仍然成立.

综上所述，方程(2)所有正整数解为 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$.

类似地，可得：

定理2 对所有的实数 $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$，方程(3)有且仅有一组正整数解 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$.

注1 显然，当 $n=1$ 时，方程(2)，(3)就变为方程(1).

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] ZHANG Wen-peng. On a Equation of Slnarandaehe and its Integer Solutions [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1-2-3): 176-178.

[3] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2008：166-168.

[4] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京：高等教育出版社，2008.

On Two Generalizations of Smarandache Equation and Their Positive Integer Solutions

HUANG Wei

Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shannxi 721013, China

Abstract: Utilizing the elementary methods and analytic methods, two generalizations of Smarandache Equation have been studied, and completely solved on the positive integer solution of the two generalizations of Smarandache Equation

$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)+\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)+\cdots+\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=2na$$
$$\left(x_1a^{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_1}a^{x_1}\right)\cdot\left(x_2a^{\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{x_2}a^{x_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(x_na^{\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{x_n}a^{x_n}\right)=(2a)^n$$

There exists positive integer solution if and only if $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$.

Key words: Smarandache equation; solvability; positive integer solution

责任编辑 廖 坤